Problemas métricos

Ángulo entre rectas y planos

Ángulo entre dos rectas

El **ángulo que forman dos rectas** es el ángulo agudo que determinan entre sí sus vectores directores.

$$\alpha(r,s)=\alpha(\vec{u},\vec{v})=\arc\cos\frac{|u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

Dos rectas son **perpendiculares** si **vectores directores** son **ortogonales** (su producto escalar es cero).

$$r\perp s \qquad \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \qquad u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3=0$$

Ej. 1:

Hallar el **ángulo** que forman las **rectas**:

$$r\equiv\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1} \qquad s\equiv\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$$

$$\vec{u}=(2,1,1) \qquad \vec{v}=(-1,2,1)$$

$$\alpha(r,s)=\alpha(\vec{u},\vec{v})=\arc\cos\frac{|2\cdot(-1)+1\cdot 2+1\cdot 1|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}}=\frac{1}{6}$$

$$(\widehat{r,s})=\arc\cos\frac{1}{6}=80.41^\circ$$

Ej. 2:

Hallar el **ángulo** que forman las **rectas**:

$$r\equiv\begin{cases}2x+3y-z+1=0\\x-y+2z+2=0\end{cases} \qquad s\equiv\begin{cases}3x-y+z-3=0\\2x+y-3z+1=0\end{cases}$$

$$\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&3&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=5\vec{i}-5\vec{j}-5\vec{k} \qquad \vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&-1&1\\2&1&-3\end{vmatrix}=2\vec{i}+11\vec{j}+5\vec{k}$$

$$\vec{u}=(5,-5,-5) \qquad \vec{v}=(2,11,5)$$

$$\alpha(r,s)=\alpha(\vec{u},\vec{v})=\arc\cos\frac{|5\cdot 2+(-5)\cdot 11+(-5)\cdot 5|}{\sqrt{5^2+(-5)^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{2^2+11^2+5^2}}=\frac{70}{\sqrt{75}\cdot\sqrt{150}}$$

$$(\widehat{r,s})=\arc\cos\frac{70}{75\cdot\sqrt{2}}=48.70^\circ$$

Ej. 3:

Hallar el **ángulo** que forma las **rectas**:

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{u} = (1,2,3) \qquad \vec{v} = (4,-1,-3)$$

$$\alpha(r,s) = \alpha(\vec{u},\vec{v}) = \text{arc cos}\,\frac{|1\cdot 4 + 2\cdot(-1) + 3\cdot(-3)|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+(-1)^2+(-3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}}$$

$$(\widehat{r,s}) = \text{arc cos}\,\frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}} = 68.48^\circ$$

Ángulo entre dos planos

El **ángulo** formado por **dos planos** es igual al ángulo agudo determinado por los vectores normales de dichos planos.

$$\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1) \qquad \overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\alpha(\pi_1, \pi_2) = \alpha(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = \text{arc cos}\,\frac{|A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2 + C_1\cdot C_2|}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}+C_1^{\,2}}\cdot\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}+C_2^{\,2}}}$$

Dos planos son **perpendiculares** si **vectores directores** son **ortogonales**.

$$\pi_1 \perp \pi_2 \qquad \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = 0 \qquad A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2 + C_1\cdot C_2 = 0$$

Ejemplo

Hallar el **ángulo** que forman los **planos**:

$$\pi_1 \equiv 2x - y + z - 1 = 0 \qquad \pi_2 \equiv x + z + 3 = 0$$

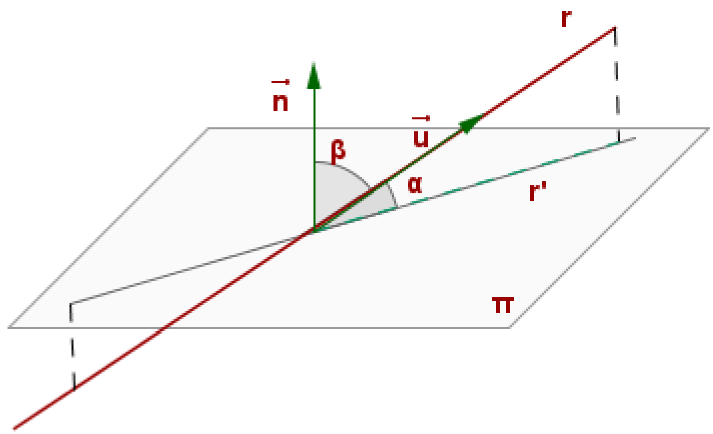
$$\overrightarrow{n_1} = (2,-1,1) \qquad \overrightarrow{n_2} = (1,0,1)$$

$$\alpha(\pi_1,\pi_2) = \alpha(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}) = \text{arc cos}\,\frac{|2\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 1\cdot 1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}$$

$$(\widehat{\pi_1,\pi_2}) = \text{arc cos}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 30^\circ$$

Ángulo entre recta y plano

El **ángulo** que forman una **recta**, r, y un **plano**, π, es el ángulo formado por r con su proyección ortogonal sobre π, r'.



El **ángulo** que forman una **recta** y un **plano** es igual al **complementario** del **ángulo agudo** que forman el **vector director** de la recta y el **vector normal** del plano.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \qquad \vec{n} = (A, B, C)$$

$$sen\,\alpha = cos\,\beta = cos\left(\vec{n}, \vec{u}\right) = \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|}$$

$$\alpha = arc\ sen\frac{\left|A\cdot u_1 + B\cdot u_2 + C\cdot u_3\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2}}$$

Si la recta r y el plano π son perpendiculares, el vector director de la recta y el vector normal del plano tienen la misma dirección y, por tanto, sus componentes son proporcionales.

$$\frac{u_1}{A} = \frac{u_2}{B} = \frac{u_3}{C}$$

Ej. 1

Determinar el **ángulo** que forman la **recta** y el $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$ **plano**.

$$\pi \equiv x + y - 1 = 0$$

$$\vec{u} = (2, 1, 2) \qquad \vec{n} = (1, 1, 0)$$

$$\alpha = arc\ sen\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^{\circ}$$

Ej. 2

Hallar el **ángulo** que forman la **recta** y el **plano**. $r \equiv \begin{cases} x + 3y - z + 3 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$

$$\pi \equiv 2x - y + 3z + 1 = 0$$

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}$$

$\vec{u} = (-4,-1,-7)$ $\quad\quad$ $\vec{n} = (2,-1,3)$

$$sen\,\alpha = \frac{\left|-4\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + (-7)\cdot 3\right|}{\sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + (-7)^2}\cdot\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{28}{\sqrt{66}\cdot\sqrt{14}}$$

$$\alpha = arc\ sen\frac{14}{\sqrt{231}} = 22.91^\circ$$

Ej. 3

Obtener el **ángulo** formado por el **plano** y la **recta** siguientes:

$$\pi \equiv x = 1 \qquad r \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 3x - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = \sqrt{3}\lambda \\ y = 2 \\ z = 3\lambda \end{cases} \qquad \vec{u}_r = \left(\sqrt{3},0,3\right) \quad \vec{n} = (1,0,0)$$

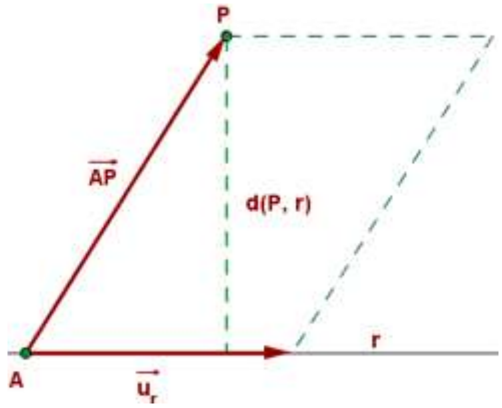
$$sen\,\alpha = \frac{\left|\sqrt{3}\cdot 1 + 0\cdot 0 + 3\cdot 0\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 0^2 + 3^2}\cdot\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = arc\ sen\frac{1}{2} = 30^\circ$$

Distancia entre rectas y planos

Distancia entre un punto y una recta

La **distancia de un punto**, P, **a una recta**, r, es la menor de la distancia desde el punto a los infinitos puntos de la recta. Esta distancia corresponde a la **perpendicular trazada desde el punto hasta la recta**.



$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\vec{u}_r\right|}$$

Ej.1

1. Hallar la **distancia** desde el **punto** P(1, 3, −2) a la **recta** .

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AP} = (1-2, 3+1, -2-1) = (-1, 4, -3) \qquad \vec{u}_r = (3, 1, -2)$$

$$\left|\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{5^2 + 11^2 + 13^2} = 3\sqrt{35} \qquad \left|\vec{u}_r\right| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$d(P, r) = \frac{3\sqrt{35}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

Ej.2

***Hallar la** distancia **desde el** punto **P(1, 2, 3) a la** recta*

$$r \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$$

$$A(2,3,4) \qquad \overrightarrow{AP} = (1-2, 2-3, 3-4) = (-1,-1,-1) \qquad \vec{u}_r = (4,4,2)$$

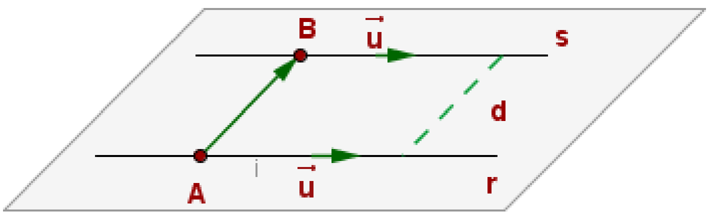
$$\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\left|\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} \qquad \left|\vec{u}_r\right| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$$

$$d(P, r) = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Distancia entre rectas paralelas

La **distancia de una recta**, r, a **otra paralela**, s, es la distancia desde un punto cualquiera de r a s.

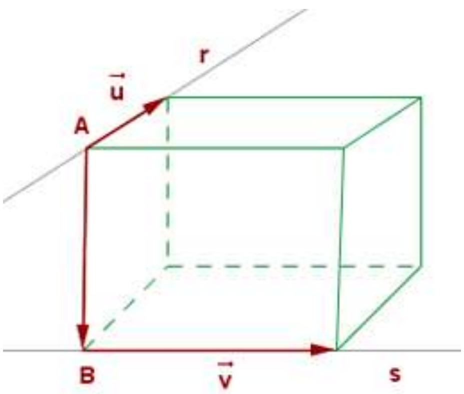


$$d(r, s) = d(A, s) = \frac{\left|\vec{u} \times \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

Distancia entre rectas que se cruzan

La **distancia entre dos sectas que se cruzan** se mide sobre la **perpendicular común**.

Sean$(\boldsymbol{A}, \vec{\boldsymbol{u}})$ y$(\boldsymbol{B}, \vec{\boldsymbol{v}})$ las determinaciones lineales de las rectas r y s.



Los vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ $\vec{\boldsymbol{u}}$ y $\vec{\boldsymbol{v}}$ determinan un **paralelepípedo** cuya **altura** es la **distancia entre las dos rectas**.

El volumen de un paralelepípedo es **$V=A_b \cdot h$**

Teniendo en cuenta que el volumen es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores y el área de la base es el producto vectorial de los vectores directores de las rectas, la altura, es decir, la distancia entre los dos puntos es igual a:

$$\boldsymbol{d(r,s) = h = \frac{V}{A_b} = \frac{\left|[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}]\right|}{|\vec{u}x\vec{v}|}}$$

Ejemplo

Hallar la mínima **distancia entre las rectas**:

$$r \equiv \frac{x+8}{2} = \frac{y-10}{3} = \frac{z-6}{1} \qquad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$$

$$A(-8,10,6) \qquad \vec{u} = (2,3,1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (9,-9,-5)$$

$$B(1,1,1) \qquad \vec{v} = (-1,2,4)$$

$$V = \left|[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}]\right| = \left\|\begin{matrix} 9 & -9 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{matrix}\right\| = 136$$

$$\vec{u}\,x\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 10\vec{i} - 9\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$A_b = |\vec{u}\,x\,\vec{v}| = \sqrt{10^2 - 9^2 + 7^2} = \sqrt{230}$$

$$h = \frac{136}{\sqrt{230}} = \frac{68\sqrt{230}}{115}$$

Distancia de un punto a un plano

La **distancia** de un **punto**, P, a un **plano**, π, es la menor de la distancia desde el punto a los infinitos puntos del plano. Esta distancia corresponde a la **perpendicular trazada desde el punto al plano**.

$$P(x_0, y_0, z_0) \qquad \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ej. 1

Hallar la distancia del punto P(3, 1, −2) a los planos y $\pi_1 \equiv 2x + y - z + 1 = 0$ $\pi_2 \equiv 2y - 3 = 0$.

$$d(P, \pi_1) = \frac{|2\cdot 3 + 1\cdot 1 - 1\cdot(-2) + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

$$d(P, \pi_1) = \frac{|2\cdot 1 - 3|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{1}{2}$$

Ej. 2

Hallar la distancia del punto Q(5,5,3) al plano $\pi \equiv (x, y, z) = (0, 0, -4) + (2, 2, -1)\lambda + (-3, 2, 0)\mu$.

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -3 \\ y & 2 & 2 \\ z+4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad 2x + 3y + 10z + 40 = 0$$

$$d(Q, \pi) = \frac{|5\cdot 2 + 3\cdot 5 + 10\cdot 3 + 40|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 10^2}} = \frac{95}{\sqrt{113}}$$

Distancia entre planos paralelos

Para calcular la **distancia entre dos planos paralelos**, se halla la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro.

También se puede calcular de esta otra forma:

$$\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D_1 = 0 \qquad \pi_2 \equiv Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejemplo

Calcular la distancia entre los planos y . $\pi_1 \equiv 2x - y - 2z + 5 = 0$

$\pi_2 \equiv 4x - 2y - 4z + 15 = 0$

$$\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{5}{15}$$

Los dos planos son paralelos.

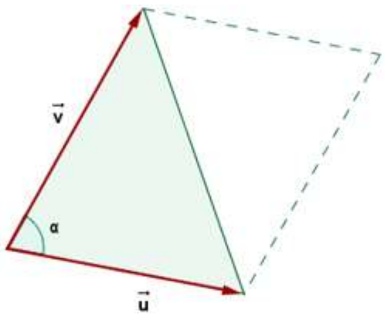
Transformamos la ecuación del segundo plano para que los dos planos tengan el mismo vector normal.

$$\pi_2 \equiv 2x - y - 2z + \frac{15}{2} = 0$$

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{\left|\frac{15}{2} - 5\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{6}$$

Áreas y volúmenes

Área de un triángulo



$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$$

Ejemplo

Determinar el **área del triángulo** cuyos vértices son los puntos A(1, 1, 3), B(2, −1, 5) y C(−3, 3, 1).

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = 0\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\vec{w} = (0, -6, -6)$$

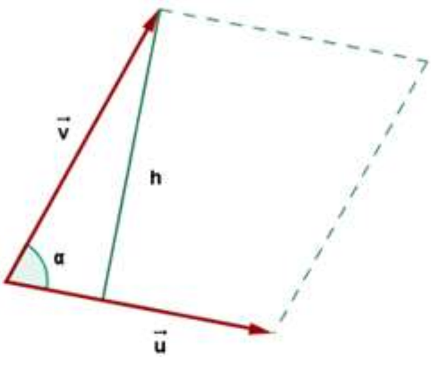
$$\left|\vec{w}\right| = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\, u^2$$

Área del paralelogramo

Geométricamente, el **módulo del producto vectorial** de dos vectores coincide con el **área del paralelogramo** que tiene por lados a esos vectores.

$$A = \left|\vec{u}\right| \cdot h = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right| \operatorname{sen} \alpha = \left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$$



Ejemplo

Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{u} = (2, 3, 4)$ y, hallar el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$A = \left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{294}\, u^2$$

Volumen de un tetraedro

El **volumen de un tetraedro** es igual a **1/6 del producto mixto**, en valor absoluto.

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Obtener el **volumen del tetraedro** cuyos vértices son los puntos A(3, 2, 1), B(1, 2, 4), C(4, 0, 3) y D(1, 1, 7).

$\overrightarrow{AB} = (1-3, 2-2, 4-1) = (-2, 0, 3)$ $\quad \overrightarrow{AC} = (4-3, 0-2, 3-1) = (1, -2, 2)$ $\quad \overrightarrow{AD} = (1-3, 1-2, 7-1) = (-2, -1, 6)$

$$V = \frac{1}{6} \left| \left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] \right|$$

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 3 - 12 - 4 = 5$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6} u^3$$

Volumen del paralelepípedo

Geométricamente, el valor absoluto del **producto mixto** representa el **volumen del paralelepípedo** cuyas aristas son tres vectores que concurren en un mismo vértice.

Ejemplo

Hallar el **volumen del paralelepípedo** formado por los vectores: $\vec{u} = (3, -2, 5)$ $\quad \vec{v} = (2, 2, -1)$ $\quad w = (-4, 3, 2)$

$$V = \left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 91 u^3$$